<u>Der Massenoperator (eigene Überlegungen)</u>

+++ Die folgenden Inhalte sind das geistige Eigentum von Boris Unrau und notariell hinterlegt! Berlin, 11.12.2005 +++

In meiner jahrelangen teils uni-bezogenen, teils privaten Auseinandersetzung mit den Wechselwirkungen und Elementarteilchen habe ich folgende Überlegungen zusammengetragen, die ihren Ursprung in diesen bis heute offenen Fragen hatten:

1) Wie kann man die Ruhemasse der Elementarteilchen erklären?
2) Wie lässt sich die Gravitation in das Theoriegebäude der anderen Wechselwirkungen einbetten?
3) Wieso existiert keine elementare Spin-0-Wechselwirkung?

Zu Punkt 1): Es ist erst einmal von elementarer Bedeutung, zu klären, was ein Elementarteilchen überhaupt ist. Nach heutigem Stand des Wissens sind dies die Leptonen (Elektron, Myon, Tauon + entsprechende Neutrinos) und die Quarks. Unter elementar könnte man „nicht weiter teilbar" verstehen, also das Fehlen einer inneren Struktur, wie es z.B. bei den Nukleonen der Fall ist.

Zu Punkt 2): Darauf werde ich auch keine befriedigende Antwort liefern können. Ich kann nur ein der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantentheorie gemeinsames mathematisches Prinzip zur Auffindung von Feldgleichungen (z.B. Einsteins Feldgleichungen, oder die Maxwellgleichungen => Elektromagnetische Wechselwirkung) präsentieren.

Zu Punkt 3: Das Graviton (Gravitationsquant) besitzt den Spin 2, das Photon (Lichtquant), die Gluonen (Feldquanten der starken Wechselwirkung) und die $W^{\pm}$ und Z-Bosonen (Feldquanten der Schwachen Wechselwirkung) besitzen den Spin 1. Wo bleibt ein elementares Spin-0-Feldquant? Es existiert derzeit in den Theoriebüchern ein vor Willkür strotzendes Higgs-Feld, welches den Spin 0 besitzen soll und für die Massengenerierung der Elementarteilchen verantwortlich gemacht wird. Es wurde bis heute nicht nachgewiesen.

Meine Idee beruht nicht auf einer Erweiterung des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, so wie es in der Kaluza-Klein- oder den String-Theorien der Fall ist. Ich verzichte auf ein unnötiges Aufblähen der Dimensionen und versuche vielmehr, die Erkenntnisse der Relativitätstheorie zu erweitern, bzw. auszuschöpfen. Dazu erinnern wir uns an die Kapitel „Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld (Geodäten)" und „Die Einsteinschen Feldgleichungen". Dort gelangten wir durch Differentiation einer invarianten skalaren Funktion

$$\Psi\left(x^{\mu}(\lambda)\right)$$

zu Tensoren höherer Stufe, also z.B.

$$\frac{d\Psi\left(x^{\mu}(\lambda)\right)}{d\lambda} = \frac{\partial\Psi\left(x^{\mu}(\lambda)\right)}{\partial x^{\mu}} \frac{d x^{\mu}}{d\lambda}$$

Der Kurvenparameter λ wird in der Relativitätstheorie oft als Eigenzeit bezeichnet. In der Differentialgeometrie ist er jedoch nicht näher spezifiziert, außer, dass λ ein invarianter Parameter ist. Bei den Differentialen unterscheide ich weiterhin zwischen einem d und einem ∂. Mit einem d meine ich das totale Differential mit einem ∂ die partielle Ableitung. Es wird hoffentlich gleich klar werden, was ich meine. Der Knackpunkt ist der: In der Relativitätstheorie wird davon ausgegangen, dass die Funktion $\Psi\left(x^\mu(\lambda)\right)$ nur von den Viererkoordinaten abhängen darf. Was aber, wenn man der Funktion $\Psi\left(x^\mu(\lambda)\right)$ ein wenig mehr Freiheiten einräumt? Wir machen daher den folgenden Ansatz:

$$\Psi(x^\mu(\lambda), \lambda)$$

Man muss schon scharf hinsehen, um den Unterschied feststellen zu können. Wir verlangen einfach nur, dass Ψ auch explizit von dem Kurvenparameter abhängen darf. Bilden wir nun die totale Ableitung (fürchterliches Wort):

$$\frac{d\,\Psi(x^\mu(\lambda), \lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}\,\frac{d\,x^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$$

Es taucht ein zusätzlicher Ableitungsterm nach dem Kurvenparameter auf. Ich gebe zu, das ist noch nicht besonders aufregend. Werfen wir jetzt einen Blick auf die Quantenmechanik, um ein wenig mehr an Klarheit zu gewinnen. Dort werden Energie- und Impuls, zusammengefasst zum Viererimpuls

$$p_\mu$$

Und quantisiert, d.h. der Viererimpuls wird durch die Viererableitung ersetzt. Die Ruhemasse m eines Teilchens geht weiterhin als freier Parameter ein:

$$p_\mu \rightarrow i\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$m \rightarrow m$$

Zu den quantenmechanischen Bewegungsgleichungen gelangt man nun (etwas unsauber aber dafür schnell, wenn man den vierdimensionalen Impulsoperator in einen skalaren Raum abbildet, nämlich auf die Ruhemasse, also z.B.
(Anmerkung: die Lichtgeschwindigkeit c und das Wirkungsquantum werden 1 gesetzt)

Diracgleichung

$$\left(i\,\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\ \Psi = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\,\partial x_\mu} + m^2\right)\ \Psi = 0$$

Dieses „Abbildungsprinzip“ kommt einem doch sehr bekannt vor. Schauen wir noch einmal zurück auf das Wegelement:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \; = d\lambda^2$$

Wenn wir unseren Kurvenparameter wieder mit der Eigenzeit identifizieren, haben wir unser Wegelement einfach in einem anderen Koordinatensystem dargestellt, nämlich einem Inertialsystem, oder wenn man so will, dem Ruhesystem eines Teilchens. Man hantiert in der Relativitätstheorie, aber auch in der Quantentheorie immer mit zwei Koordinatensystemen. Das eine ist das Ruhesystem des Teilchens und das andere ein relativ zu diesem bewegtes Koordinatensystem. Die Dirac- oder Klein-Gordon-Gleichung beinhalten dieselbe Vorgehensweise wie beim Wegelement. Doch jetzt kommt der neue Gedanke. Schauen wir noch einmal auf

$$\frac{d\Psi(x^\mu(\lambda),\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}\frac{d\,x^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$$

Der Impulsoperator $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ taucht auf der rechten Seite auf. Wir wollen die Ableitung von Ψ nach dem Kurvenparameter als Massenoperator identifizieren. Wir gelangen so zu den verallgemeinerten quantenmechanischen Bewegungsgleichungen:

Viererimpulsoperator

$$p_\mu \rightarrow i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Massenoperator

$$m \rightarrow i\frac{\partial}{\partial \lambda}$$

Diracgleichung

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\; \Psi = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \,\partial x_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right)\; \Psi = 0$$

Das ist im Grunde schon alles. Womit wir uns jetzt noch beschäftigen müssen, sind die Konsequenzen, die sich aus diesem Ansatz ergeben. Die Quantisierung der Ruhemasse lässt vermuten, dass sich ein Eigenwertspektrum für die Elementarteilchen gewinnen lassen kann. Dazu mehr sehr viel später. Zunächst müssen wir zeigen, dass die altbekannten quantenmechanischen Bewegungsgleichungen in den „neuen“, verallgemeinerten enthalten sind. Nehmen wir uns die Klein-Gordon-Gleichung vor und machen den Ansatz:

$$\Psi \,=\, \Psi(x^\mu)e^{-i\cdot m\,\lambda}$$

dann folgt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\,\partial x_\mu}+m^2\right)\,\Psi=0$$

Wir erhalten nach Abspaltung der λ-Abhängigkeit also die gute alte Klein-Gordon-Gleichung mit der Masse m. Gleiches kann man für die verallgemeinerte Dirac-Gleichung zeigen. Das war kein Kunststück. Die Separation der Masse gelingt auch nur deshalb, weil keine λ-abhängigen Terme in die Bewegungsgleichung mit eingehen. Das ändert sich natürlich, wenn λ-abhängige Wechselwirkungsterme mit einbezogen werden müssen. In der Quantentheorie gelangt man, gezwungener Maßen, zu den Wechselwirkungen, wenn man lokale Eichtransformationen zulässt, also

$$\Psi=\widehat{\Psi}\cdot e^{i\cdot\rho\,(x^\mu,\lambda)}$$

Man beachte, dass bei den quantenmechanischen Wellenfunktionen die Viererkoordinaten natürlich nicht mehr von dem Kurvenparameter abhängen. Die Eichtransformation hat zur Folge, dass eine Wechselwirkung erforderlich ist, damit die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen weiterhin invariant gegenüber den Eichtransformationen bleiben. Man muss die Impulsoperatoren modifizieren, in dem man eine „kovariante" Ableitung einführt (kovariant aber nicht im Sinne der Relativitätstheorie). Das Transformationspaket muss demnach vollständig so lauten:

$$\Psi=\widehat{\Psi}\cdot e^{i\cdot\rho\,(x^\mu,\lambda)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\rightarrow\frac{\partial}{\partial x^\mu}+i\,A_\mu(x^\mu,\lambda)$$

$$\widehat{A}_\mu=A_\mu(x^\alpha,\lambda)+\frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\rightarrow\frac{\partial}{\partial\lambda}+i\,\phi(x^\mu,\lambda)$$

$$\widehat{\phi}=\phi(x^\alpha,\lambda)+\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}$$

Die Abhängigkeit der Phasenfunktion ρ von λ erfordert die Einführung einer skalaren (Spin-0) Funktion ϕ. Bleibt nur noch zu zeigen, dass die Bewegungsgleichungen für das Viererpotential A_μ und die skalare Funktion ϕ invariant gegenüber den obigen Transformationen sind. Dazu bemühen wir uns der altbekannten Kommutatortechnik, dabei gilt ab jetzt:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\overset{\text{def}}{=}A_{\mu,\nu}$$

also

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}+i\,A_\mu\,,\frac{\partial}{\partial x^\nu}+i\,A_\nu\right]=-i\left(A_{\mu,\nu}-A_{\nu,\mu}\right)\overset{\text{def}}{=}-iF_{\mu\nu}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i\,A_{\mu}\,,\frac{\partial}{\partial\lambda} + i\,\phi\right] = -i\left(A_{\mu,\lambda} - \phi_{,\mu}\right) \stackrel{\text{def}}{=} -iF_{\mu}$$
Man sieht z.B. sehr leicht an dem Feldstärketensor F_{μ} , dass dieser invariant unter obigen Transformationen ist, denn

$$F_{\mu} = A_{\mu,\lambda} - \phi_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\widehat{A}_{\mu} - \rho_{,\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\widehat{\phi} - \rho_{,\lambda}\right) = \widehat{A}_{\mu,\lambda} - \widehat{\phi}_{,\mu} = \widehat{F}_{\mu}$$

Ich möchte hier kurz ein gemeinsames mathematisches Prinzip zum Auffinden der Bewegungsgleichungen der verschiedenen Wechselwirkungen aufzeigen. Die Kommutatortechnik ist geeignet, um auf Feldstärketensoren der verschiedenen Eichwechselwirkungen zu kommen (elektromagnetische, schwache und starke). Es ist jedoch nicht ganz einzusehen, wie man mit Hilfe der Kommutatortechnik auf die Einsteinschen Feldgleichungen kommen kann. Man kann die Ableitung der Basisvektoren mit Hilfe der Christoffelsymbole $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ wieder auf die Basisvektoren selbst zurückführen (was ein altbekannter Hut ist):

$$\vec{g}^{\alpha}_{,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\vec{g}^{\nu}$$

Wenden wir also den Kommutator auf die Basisvektoren an (bitte die Zwischenschritte selber nachrechnen):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,,\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right]\vec{g}^{\alpha} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\,\gamma}\right)\vec{g}^{\,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\alpha}_{\gamma\nu\,\mu}\,\vec{g}^{\,\gamma}$$

$R^{\alpha}_{\gamma\nu\,\mu}$ ist der Riemannsche Krümmungstensor, aus dem sich die Einsteinschen Feldgleichungen ableiten lassen. Doch zurück zu dem neuen Feldstärketensor F_{μ}. Da Ableitungen nach dem Kurvenparameter etwas mit der Masse eines Feldes oder Teilchen zu tun haben, müssen Wir die Bewegungsgleichungen für das Vierrepotential und das skalare Potential finden. üblicherweise bastelt man sich eine Lagrangedichte L zurecht und erhält die gesuchten Gleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichnungen. Der Konstruktion der Lagrangedichte haftet ein wenig Willkür an. Wir wollen uns zur Randbedingung machen, dass sich als Grenzfall die (freien) Maxwellgleichungen ergeben. Wir machen folgenden Ansatz

$$L = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu}F^{\mu}$$

Für das Viererpotential lauten die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial A_{\mu}}$$

und für das skalare Potential

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\nu}} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = F^{\mu\nu}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\lambda}} = -F^{\mu}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} = F^{\mu}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\lambda}} = 0$$

ergeben sich

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\lambda}} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} - F^{\mu}{}_{,\lambda} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\,\partial x_{\nu}} A^{\mu} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} A^{\nu}_{,\nu} - A^{\mu}_{,\lambda,\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda\,\partial x_{\mu}} \phi = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\nu}} = F^{\nu}{}_{,\nu} = A^{\nu}_{,\nu,\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\,\partial x_{\nu}} \phi = 0$$

Mit Hilfe der erweiterten Eichbedingung

$$A^{\nu}_{,\nu} - \phi_{,\lambda} = 0$$

lassen sich die beiden Gleichungen entkoppeln

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\,\partial x_{\nu}} A^{\mu} - A^{\mu}_{,\lambda,\lambda} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\,\partial x_{\nu}} \phi - \phi_{,\lambda,\lambda} = 0$$

Würde man nun wieder die Abhängigkeit vom Kurvenparameter mittels einer komplexen e-Funktion abspalten, erhält man die bekannten Bewegungsgleichungen für ein Spin-1- und Spin-0-Feld mit Masse.

Untersuchen wir die neuen Gleichungen bei kompletter Unabhängigkeit des Viererpotentials und des skalaren Potentials vom Kurvenparameter λ. Werfen wir zunächst einen Blick auf die Eichbedingung. Wenn kein skalares Potential vorhanden ist, reduziert sich die Eichbedingung auf

$$A^{\nu}_{,\nu} = 0$$

Das ist die bekannte Lorentzeichung. Mit den Maxwellgleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\,\partial x_{\nu}} A^{\mu} = 0$$

Nebenbei ergibt sich noch eine masselose Spin-0-Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\,\partial x_{\nu}} \phi = 0$$

Die Maxwell-Gleichungen vertragen sich also nur mit einer masselosen Spin-0-Gleichung oder mit $\phi = 0$.

Interessant sind nun die Fälle, bei denen das Viererpotential und/oder das skalare Potential explizit vom Kurvenparameter abhängen. Dies ermöglicht u.a. Spin-1-Fleder mit Masse, wie es z.B. aus der schwachen Wechselwirkung bekannt ist, und zwar ohne die künstliche Einführung des Higgs-Mechanismus.