Herleitung des Riemannschen Krümmungstensors mit Hilfe der Kommutatortechnik

Wir lassen den Kommutator der Ableitungen nach den Viererkoordinaten auf die Basis wirken:

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu}$$

Mit

$$\nabla_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Folgt

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu} = \left(\vec{g}^{\,\mu}{}_{,\beta}\right)_{,\alpha} - \left(\vec{g}^{\,\mu}{}_{,\alpha}\right)_{,\beta}$$

Wir nutzen die bekannte Rückführung der Ableitung der Basis mit Hilfe der Christoffelsymbole auf die Basis selbst

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu} = \left(-\Gamma^\mu_{\beta\lambda}\vec{g}^{\,\lambda}\right)_{,\alpha} - \left(-\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\vec{g}^{\,\lambda}\right)_{,\beta}$$

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu} = \left(-\Gamma^\mu_{\beta\lambda,\alpha}\vec{g}^{\,\lambda} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\vec{g}^{\,\lambda}{}_{,\alpha}\right) - \left(-\Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta}\vec{g}^{\,\lambda} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\vec{g}^{\,\lambda}{}_{,\beta}\right)$$

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu} = \left(-\Gamma^\mu_{\beta\lambda,\alpha}\vec{g}^{\,\lambda} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\varepsilon}\vec{g}^{\,\varepsilon}\right) - \left(-\Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta}\vec{g}^{\,\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\varepsilon}\vec{g}^{\,\varepsilon}\right)$$

Umbenennung der Indizes liefert

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu} = -\Gamma^\mu_{\beta\nu,\alpha}\vec{g}^{\,\nu} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\vec{g}^{\,\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta}\vec{g}^{\,\nu} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\nu}\vec{g}^{\,\nu}$$

Das kann man auch umsortieren und so schreiben (mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors)

$$\left[\nabla_\alpha,\nabla_\beta\right]\,\vec{g}^{\,\mu} = \left(\Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\nu,\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\nu}\right)\vec{g}^{\,\nu} = R^\mu_{\beta\nu\alpha}\vec{g}^{\,\nu}$$