Es gilt per Definition (Ableitungen nach den Viererkoordinaten werden durch ein Komma, gefolgt vom Index abgekürzt)

$$\vec{g}^{\mu}_{,\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\vec{g}^{\alpha}$$

Es gilt aber auch per Definition

$$\vec{g}^{\mu} \cdot \vec{g}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

Für die Ableitung des kovarianten Metriktensors setzen wir an:

$$\vec{g}_{\mu,\nu} = \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}\vec{g}_{\alpha}$$

Leiten wir die Deltafunktion ab, erhalten wir

$$\left(\delta^{\mu}_{\nu}\right)_{,\alpha} = 0 = \vec{g}^{\mu}_{,\alpha} \cdot \vec{g}_{\nu} + \vec{g}^{\mu} \cdot \vec{g}_{\nu,\alpha} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\vec{g}^{\beta} \cdot \vec{g}_{\nu} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\nu\alpha}\vec{g}^{\mu} \cdot \vec{g}_{\beta}$$

$$0 = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\delta^{\beta}_{\nu} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\nu\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} = \hat{\Gamma}^{\mu}_{\nu\alpha}$$

Wir differenzieren nun

$$\vec{g}_{\mu} = g_{\mu\nu}\vec{g}^{\nu}$$

also

$$\vec{g}_{\mu,\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha}\vec{g}^{\nu} + g_{\mu\nu}\vec{g}^{\nu}_{,\alpha}$$

Mit den oben gefundenen Ergebnissen ergibt das

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\vec{g}_{\beta} = g_{\mu\nu,\alpha}\vec{g}^{\nu} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\vec{g}^{\beta}$$

Skalare Multiplikation mit $\vec{g}^{\lambda}$ liefert

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha}g^{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$$

Nun ziehen wir den Index λ mit $g_{\lambda\gamma}$ runter

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}g_{\lambda\gamma} = g_{\mu\gamma,\alpha} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma}$$

oder

$$g_{\lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma} = g_{\mu\gamma,\alpha}$$

Durch zyklisches Vertauschen der Indizes μ, γ, α gewinnt man die weiteren zwei Zeilen

$$g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} + g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} = g_{\alpha\gamma,\mu}$$

$$g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} + g_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} = g_{\alpha\mu,\gamma}$$

Fast fertig. Die erste der drei Zeilen multiplizieren wir mit – ½ die letzten beiden mit ½ und addieren (die Christoffelsymbole sind bezüglich der unteren beiden Indizes symmetrisch, was noch zu zeigen bliebe):

$$\frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} + g_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} + g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} + g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} - g_{\lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma}\right) = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\mu} - g_{\mu\gamma,\alpha}\right)$$

Auf der rechten eite heben sich der erste und sechste und der zweite und fünfte gegeneinander auf. Bennen wir die Summationsindizes um, erhalten wir

$$g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\mu} - g_{\mu\gamma,\alpha}\right)$$

Ziehen wir nun noch den Index α hoch, ergibt sich schluss und endlich

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\alpha\mu,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\mu} - g_{\mu\gamma,\alpha}\right)$$